

CỤM TRƯỜNG

THPT SÓC SƠN – MÊ LINH

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023

MÔN: TOÁN

Câu 1: Có bao nhiêu cách lập một tổ công tác gồm 3 người từ một nhóm 6 người?

A. 6^3 .

B. A_6^3 .

C. 3^6 .

D. C_6^3 .

Lời giải

Chọn D

Số cách lập một tổ công tác gồm 3 người từ một nhóm 6 người là số tổ hợp chập 3 của 6 phần tử.

Do đó có C_6^3 cách.

Câu 2: Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp gồm 5 viên bi đen và 4 viên bi trắng. Xác suất để 2 viên bi được chọn cùng màu bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{4}{9}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

Gọi A là biến cố: “Chọn được 2 bi cùng màu”.

Khi đó số phần tử của biến cố A là: $n(A) = C_5^2 + C_4^2 = 16$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát u_n ($n \geq 2$) bằng

A. 3.2^n .

B. 3.2^{n+2} .

C. 3.2^{n-1} .

D. 3.2^{n+1} .

Lời giải

Chọn C

Số hạng tổng quát $u_n = u_1.q^{n-1} = 3.2^{n-1}$.

Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a , độ dài cạnh bên bằng $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp bằng

A. 60° .

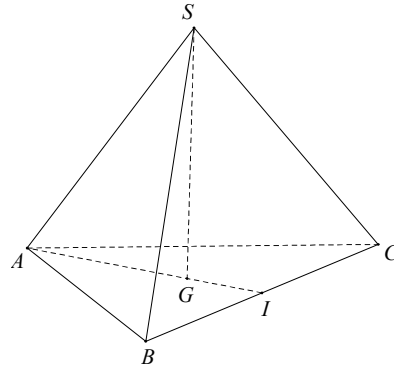
B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét $\triangle SAG$ ta có: $\cos \widehat{SAG} = \frac{AG}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SAG} = 60^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

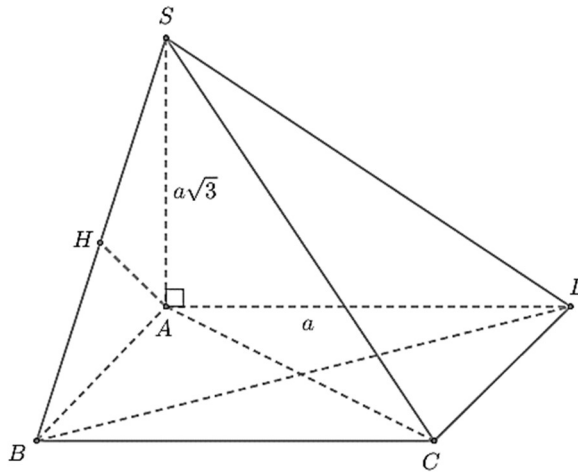
B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $BC \perp SA$; $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$, vẽ $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình dưới. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+		-	0	+	

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ bảng xét dấu đạo hàm ta lập được bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+		-	0	+	
y											

Dễ thấy hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

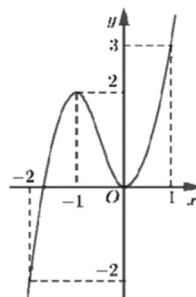
Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$, với x thuộc khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Gọi a, A lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x+1)$ trên đoạn $[-1; 0]$. Giá trị $a + A$ bằng



A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

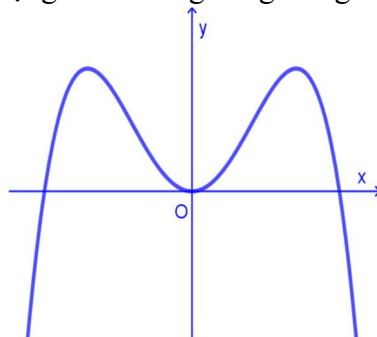
Đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ được thực hiện bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 1 đơn vị.

Do đó: $\min_{[-1;0]} f(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

$\max_{[-1;0]} f(x+1) = 3 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy $a + A = 0 + 3 = 3.$

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào sau đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = x^3 + 3x^2.$

B. $y = -x^3 + 3x.$

C. $y = x^4 - 2x^2.$

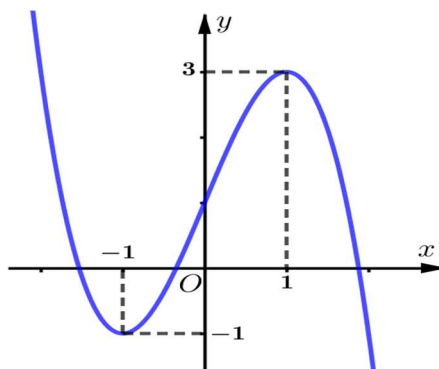
D. $y = -x^4 + 2x^2.$

Lời giải

Chọn D

Đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương, hệ số $a < 0 \Rightarrow$ Chọn đáp án **D**.

Câu 10: Cho $f(x) = (x-1)^3 - 3x + 3.$ Đồ thị hình bên là của hàm số có công thức



A. $y = -f(x+1) - 1.$ **B.** $y = -f(x+1) + 1.$ **C.** $y = -f(x-1) - 1.$ **D.** $y = -f(x-1) + 1.$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)$

Thử điểm đối với từng đáp án

Đáp án A: $y = -f(x+1) - 1 \Rightarrow y(1) = -f(2) - 1 = 1 \Rightarrow$ Loại

Đáp án B: $y = -f(x+1) + 1 \Rightarrow y(1) = -f(2) + 1 = 3 \Rightarrow$ thoả mãn.

Đáp án C: $y = -f(x-1) - 1 \Rightarrow y(1) = -f(0) - 1 = -3 \Rightarrow$ Loại

Đáp án D: $y = -f(x-1) + 1 \Rightarrow y(1) = -f(0) + 1 = -1 \Rightarrow$ Loại

Cách 2: Từ đồ thị suy ra hàm số ứng với đồ thị trên là $y = -x^3 + 3x + 1.$

Ta làm tường minh các hàm số cho trong các đáp án và so sánh

Đáp án A: $y = -f(x+1) - 1 = -x^3 + 3x - 1 \Rightarrow$ Loại

Đáp án B: $y = -f(x+1) + 1 = -x^3 + 3x + 1 \Rightarrow$ Nhận.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

x	-3	-2	0	1	3
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	1		0		8

A. 0.

B. 8.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 8$.

Câu 12: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{x+2}$ là

A. $y = -1$

B. $y = 1$

C. $x = -2$.

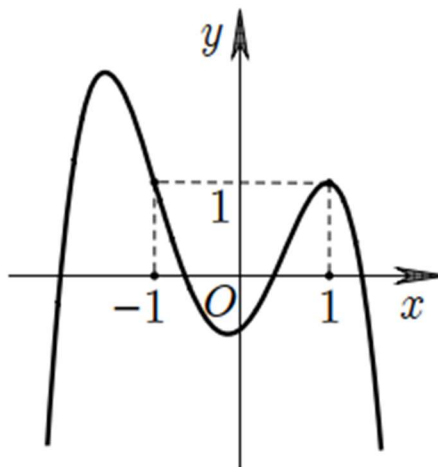
D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1$, do đó đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$

Câu 13: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt



A. 3.

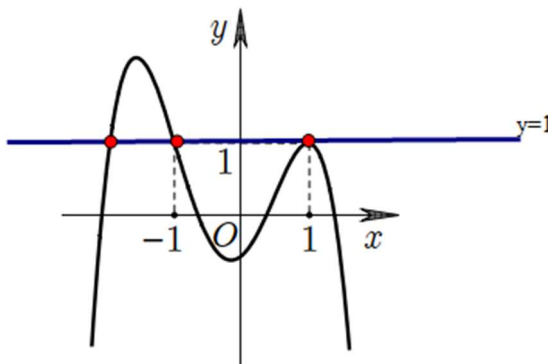
B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$

Vẽ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 3 điểm

Suy ra phương trình $f(x) - 1 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 14: Với mọi số thực a dương thì $\log_3^2(a^2)$ bằng

- A.** $2\log_3^2 a$. **B.** $\frac{1}{4}\log_3^2 a$. **C.** $4\log_3^2 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_3^2 a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3^2(a^2) = (2\log_3 a)^2 = 4\log_3^2 a$.

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y = 3^{1-x}$ là

- A.** $y' = -3^{1-x} \cdot \ln 3$. **B.** $y' = 3^{1-x} \cdot \ln 3$. **C.** $y' = 3^{1-x}$. **D.** $y' = -3^{1-x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = (1-x)' \cdot 3^{1-x} \cdot \ln 3 = -3^{1-x} \cdot \ln 3$.

Câu 16: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3 5$ là

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Với điều kiện trên, phương trình trở thành:

$$\log_3(x+2)(x-2) = \log_3 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3(l) \\ x = 3(n) \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 17: Bất phương trình $3^{x^2-6x-16} < 9^{x+2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 12.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3^{x^2-6x-16} < 3^{2x+4} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 < 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 10$
Suy ra bất phương trình đã cho có 11 nghiệm nguyên.

Câu 18: Cho $\int_1^2 f(x) dx = -1$; $\int_2^4 f(x) dx = 3$. Tích phân $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. -3.

C. -4.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = -1 + 3 = 2$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(1-2x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $1-2x=t \Rightarrow -2dx=dt \Rightarrow dx=-\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=-1$.

Khi đó: $\int_0^1 f(1-2x) dx = \frac{1}{3} = \int_1^{-1} f(t) \cdot \frac{-1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt \Rightarrow \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{e}{2}}$ là

A. $D = (3; +\infty)$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = [3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{e}{2}}$ xác định khi $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = (3; +\infty)$.

Câu 21: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0$ là

A. $(1; 2)$.

B. $(1; 2]$.

C. $(-\infty; 2]$.

D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow (1; 2].$$

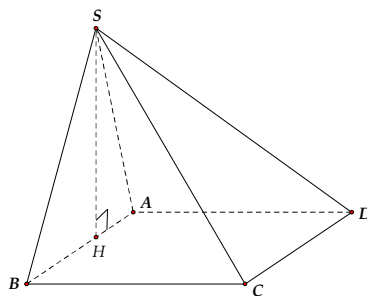
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 2]$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}$; $AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là

- A. $4\sqrt{3}a^3$. B. $4a^3$ C. $2\sqrt{3}a^3$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi SH là đường cao của $\triangle SAB$. Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ suy ra SH là đường cao của chóp $S.ABD$.

$$\text{Ta có } SH = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a.$$

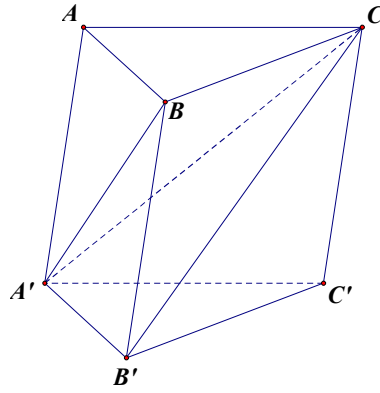
$$V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot SH = 2\sqrt{3}a^3.$$

Câu 23: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ mà mặt bên $ABB'A'$ có diện tích bằng 4. Khoảng cách giữa cạnh CC' và $A'B$ bằng 7. Thể tích khối lăng trụ bằng

- A. 10. B. 28. C. 12. D. 14.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Có } d(CC', A'B) = d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A')) \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = 7$$

$$\Rightarrow V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{3} d(C, (ABB'A')) \cdot S_{ABB'A'} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 7 = \frac{28}{3}$$

$$\text{Đồng thời } V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2} V_{C.ABB'A'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{28}{3} = 14.$$

Câu 24: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$ là

- A. $\sin x + \cot x + C$ B. $-\sin x + \cot x + C$ C. $\sin x - \cot x + C$ D. $-\sin x - \cot x + C$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \sin x + \cot x + C$$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2020F(-1) + 2021F(2) = 2023. \text{ Giá trị } F(1) \text{ nằm trong khoảng nào?}$$

- A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = 2020 \int_1^{-1} f(x) dx + 2021 \int_1^2 f(x) dx = 2020F(-1) + 2021F(2) - 4041F(1).$$

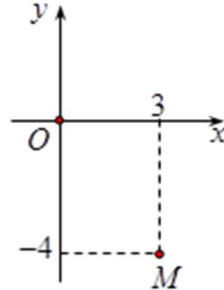
$$\Rightarrow 4041F(1) = 2020F(-1) + 2021F(2) - I.$$

$$\text{Mà } \int_1^{-1} f(x) dx = - \left[\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = - \left[\int_{-1}^0 (1 - 2x) dx + \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx \right] = -3.$$

và $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = 5$. Suy ra $I = 2020 \cdot (-3) + 2021 \cdot 5 = 4045$.

Vậy $4041F(1) = 2020F(-1) + 2021F(2) - I = -2022 \Rightarrow F(1) = -\frac{674}{1347}$.

Câu 26: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Khi đó số phức $w = 5\bar{z}$ là



- A. $w = 15 + 20i$. B. $w = -15 - 20i$. C. $w = -15 + 20i$. D. $w = 15 - 20i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $w = 5\bar{z} = 5(3 + 4i) = 15 + 20i$

Câu 27: Tính nguyên hàm $\int x\sqrt{x+2} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{x+2}$ ta thu được nguyên hàm nào dưới đây?

- A. $\int (t^2 - 2)tdt$. B. $\int 2(t^2 - 2)tdt$. C. $\int 2(t^2 - 2)t^2dt$. D. $\int 2t^2dt$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Leftrightarrow 2tdt = dx \Rightarrow \int x\sqrt{x+2}dx = \int 2(t^2 - 2)t^2dt$.

Câu 28: Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

- A. $7i$ B. $\sqrt{58}$ C. -3 D. 7

Lời giải

Chọn D

Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng 7

Câu 29: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A. 16 . B. 56 . C. 20 . D. 26 .

Lời giải

Chọn A

Theo định lý Vi-ét ta có: $z_1 + z_2 = 6, z_1z_2 = 10$

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 6^2 - 20 = 16$.

Câu 30: Giả sử D là hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2 - 3x + 2$ và trục hoành. Quay D quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

- A. $V = \frac{\pi}{30}$. B. $V = \frac{1}{6}$. C. $V = \frac{\pi}{6}$. D. $V = \frac{1}{30}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thể tích của vật thể là: $V = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x) dx$
 $= \pi \left(\frac{x^5}{5} + 3x^3 + 4x - \frac{3}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{30}$.

Câu 31: Cho khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. $4a^3$ **B.** $\frac{2}{3}a^3$. C. $2a^3$ D. $\frac{4}{3}a^3$

Lời giải

Chọn B

Diện tích đáy của hình chóp: $B = a^2$

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \frac{2}{3}a^3$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = 4$?

- A. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$. **B.** $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.
 C. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$. D. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = 4$ là $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $z(1-2i) - 3 + 4i = 4 + 5i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ là

- A. 4. **B.** -2. C. -4. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$z(1-2i) - 3 + 4i = 4 + 5i \Leftrightarrow z = \frac{4+5i+3-4i}{1-2i} = 1+3i$.

Suy ra $\bar{z} = 1-3i$. Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$ là -2.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $B(2; 1; 1)$ đồng thời nhận vec tơ $\vec{n} = (2; 3; -1)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là

- A.** $2x + 3y - z - 6 = 0$. B. $2x + y - z - 4 = 0$. C. $2x + 3y - z + 6 = 0$. D. $2x + y + z - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$2(x-2) + 3(y-1) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - z - 6 = 0$.

Câu 35: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Độ dài đường sinh của hình nón (N) bằng

- A. 12. B. $\sqrt{7}$. C. 1. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường sinh hình nón là: $l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Câu 36: Cho mặt cầu (S) có diện tích bằng 4π . Thể tích khối cầu (S) bằng

- A. 16π . B. 32π . C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{16\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu (S) có diện tích bằng $4\pi \Rightarrow 4\pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R = 1$

Vậy thể tích khối cầu (S) là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_2(2;4;-1)$. B. $\vec{u}_1(2;-5;3)$. C. $\vec{u}_3(2;5;3)$. D. $\vec{u}_4(3;4;-1)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $N(1;3;-1)$. B. $M(-3;5;3)$. C. $Q(3;5;3)$. D. $P(1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Với $t = -2$, ta có $\begin{cases} x = 1 + 2(-2) = -3 \\ y = 3 - (-2) = 5 \\ z = 1 - (-2) = 3 \end{cases}$.

Vậy $M(-3;5;3) \in d$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{OA} = \vec{j} - \vec{i} + 2\vec{k}$. Khi đó điểm A có tọa độ là

- A. $(1;-1;-2)$. B. $(-1;1;-2)$. C. $(-1;1;2)$. D. $(1;-1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (-1; 1; 2) \Rightarrow A(-1; 1; 2)$.

Câu 40: Trong không gian với $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có tọa độ

- A.** $D(-4; -2; 9)$. **B.** $D(-2; 4; -5)$. **C.** $D(4; 2; 9)$. **D.** $D(6; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 7)$, gọi $D(x; y; z)$, $\overrightarrow{CD} = (x + 3; y - 1; z - 2)$.

$$ABCD \text{ là hình bình hành khi } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = -1 \\ y - 1 = -3 \\ z - 2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow D(-4; -2; 9).$$

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 7 = 0$ qua điểm $A(2; 0; 1)$, vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x - y + z + 1 = 0$ và tạo với mặt phẳng $(R): x - y + 2z - 1 = 0$ một góc 60° . Tổng $a + b + c$ bằng

- A.** 10. **B.** 0. **C.** -14. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Do mặt phẳng (P) qua điểm $A(2; 0; 1)$ nên ta có: $2a + c = -7 \Leftrightarrow c = -2a - 7$ (1).

Mặt phẳng (P) , (Q) , (R) có vector pháp tuyến lần lượt là:

$$\vec{n}_1 = (a; b; c), \vec{n}_2 = (3; -1; 1), \vec{n}_3 = (1; -1; 2).$$

Do mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) nên ta có:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 3a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = 3a + c \Leftrightarrow b = a - 7 \text{ (2)}.$$

Do mặt phẳng (P) tạo với mặt phẳng (R) một góc 60° nên ta có:

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|} \Leftrightarrow \frac{|a - b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|a - b + 2c| = \sqrt{6}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ (3)}.$$

Thay (1), (2) vào (3) ta có:

$$2|a - b + 2c| = \sqrt{6}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow 2|a - a + 7 - 4a - 14| = \sqrt{6}\sqrt{a^2 + (a - 7)^2 + (-2a - 7)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2|-4a-7| = \sqrt{6}\sqrt{6a^2+14a+98}$$

$$\Leftrightarrow 28a^2 + 140a - 392 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -7 \end{cases}.$$

$$\text{Với } a = 2 \Rightarrow b = -5, c = -11 \Rightarrow a + b + c = -14.$$

$$\text{Với } a = -7 \Rightarrow b = -14, c = 7 \Rightarrow a + b + c = -14.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = -14.$$

- Câu 42:** Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S và tạo với trục của (N) một góc bằng 30° , ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng
- A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

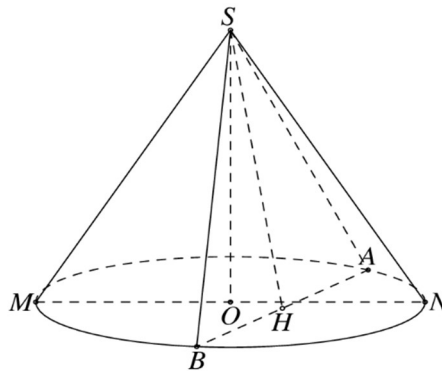
Gọi H là trung điểm AB , h là chiều cao của hình nón.

Khi đó, góc giữa trục SO và (SAB) bằng góc $\widehat{OSH} = 30^\circ$. Khi đó ta có

$$SH = \frac{SO}{\cos \widehat{OSH}} = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

Theo giả thiết ta có tam giác SAB vuông cân tại S , do đó $AB = 2SH = \frac{4h}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác SAB bằng $4a^2$, suy ra $\frac{1}{2} \cdot SH \cdot AB = 4a^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4h}{\sqrt{3}} = 4a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{3}$.



- Câu 43:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?
- A.** 27. **B.** 31. **C.** 28. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4 - m)x$. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 - m$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4.$$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$ có 3 nghiệm dương phân biệt. (*)

Xét hàm số $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$. Ta có: $h'(x) = 12x^2 - 72x + 60$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	1	5	$+\infty$			
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	4		32		-96		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có (*) $\Leftrightarrow 4 < m < 32$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5; 6; 7; \dots; 31\}$.

Vậy có 27 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44: Cho số phức z thỏa mãn $3z + 2\bar{z} = (4 - i)^2$. Mô đun của số phức z là

A. 8.

B. 73.

C. $\sqrt{73}$.

D. 64.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } 3z + 2\bar{z} = (4 - i)^2 \Leftrightarrow 3(a + bi) + 2(a - bi) = 15 - 8i$$

$$\Leftrightarrow 5a + bi = 15 - 8i \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 15 \\ b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } z = 3 - 8i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-8)^2} = \sqrt{73}.$$

Câu 45: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x) \cdot [\log_3(x + 25) - 3] \leq 0$?

A. 24.

B. Vô số.

C. 26.

D. 25.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -25$ (*).

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 3^{x^2} - 9^x \geq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} \geq 3^{2x} \\ \log_3(x+25) \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 2x \\ x+25 \leq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $x \in (-25; 0] \cup \{2\}$.

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-24; -23; \dots; 1; 0; 2\} \Rightarrow$ có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 3^{x^2} - 9^x \leq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} \leq 3^{2x} \\ \log_3(x+25) \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2x \\ x+25 \geq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (tm)}.$$

Kết hợp các trường hợp, ta có tất cả 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn đề.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có đúng 8 cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$, trong đó $x = 1$ là nghiệm bội chẵn, $x = 0$ và $x = 2$ là các nghiệm đơn.

Đạo hàm : $g'(x) = (3x^2 - 6x) \cdot f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}.$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 1$ (nếu có) dấu của $f'(x^3 - 3x^2 + m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ và $x^3 - 3x^2 + m = 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2 + 6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$				
y	$+\infty$			0			4			$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3 + 3x^2 = m$ và $-x^3 + 3x^2 = m - 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là :

$$0 < m - 2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 47: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$, $y \in [0; 2023^3]$ thỏa mãn phương trình

$$\log_4 \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right) = \log_2 (y - x) ?$$

A. 90854.

B. 90990.

C. 2021^2 .

D. $2021^2 - 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y - x > 0 \\ x \geq -\frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_4 \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right) = \log_2 (y - x) \Leftrightarrow \log_4 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right)^2 = \log_2 (y - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right) = \log_2 (y - x) \Leftrightarrow y - x = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right) \Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2.$$

$$\text{Vì } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \frac{2m+1}{2} (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = m^2 + m; \text{ khi đó } y = (m+1)^2.$$

$$\text{Mà } y \in [0; 2023^3] \Rightarrow (m+1)^2 \leq 2023^3 \Rightarrow 0 \leq m \leq 2023\sqrt{2023} - 1 \approx 90989,03.$$

Do đó có 90990 giá trị của m , ứng với đó có 90990 cặp $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$. Khi đó giá trị lớn nhất M của $|z-2+3i|$ bằng

- A. $M = \frac{10}{3}$. B. $M = 1 + \sqrt{13}$. C. $M = 4\sqrt{5}$. D. $M = 9$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(0;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10.$$

$$\text{Ta lại có : } 5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$$

$$\Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{MB^2 + MC^2} \Rightarrow 25MA^2 \leq 10(2MA^2 + 10) \Rightarrow MA \leq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Mà } |z-2+3i| = |(z-i) + (-2+4i)| \leq |z-i| + |2-4i| \leq |z-i| + 2\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |z-i| = 2\sqrt{5} \\ \frac{a}{-2} = \frac{b-1}{4} \end{cases}, \text{ với } z = a+bi; a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-3i \text{ (loại)} \\ z = -2+5i \end{cases}.$$

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ và hai điểm

$A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn

$P = MA^4 + MB^4 + MA^2 \cdot MB^2$ nhỏ nhất. Tung độ điểm M là

- A. $y_0 = 3$. B. $y_0 = 2$. C. $y_0 = 1$. D. $y_0 = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta gọi điểm K là trung điểm của cạnh $AB \Rightarrow K(2;-1;0)$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (0; -2; -6);$$

$$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{a_d} = (1; 2; 3) \\ C(3; 1; 3) \in d \end{cases};$$

$$\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0);$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{a_d} = (-6; 6; -2);$$

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{a_d}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

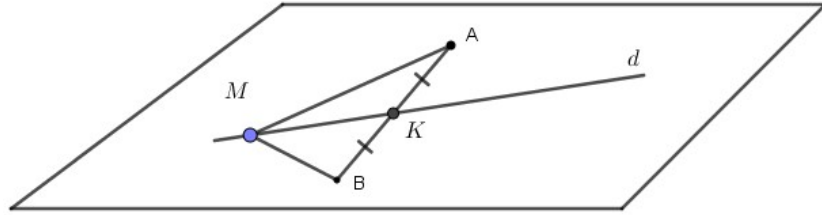
Suy ra, đường thẳng AB và đường thẳng d đồng phẳng.

Ta có, phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 2 \\ y = t' \\ z = 3 + 3t' \end{cases}; t' \in \mathbb{R}.$

Gọi $D = AB \cap d$.

Suy ra, tọa độ của điểm D thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} 3+t=2 \\ 1+2t=t' \\ 3+3t=3+3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t'=-1 \end{cases} \Rightarrow D(2;-1;0) \equiv K.$$



Ta có:

$$P = MA^4 + MB^4 + MA^2 \cdot MB^2 = (MA^2 + MB^2)^2 - MA^2 \cdot MB^2$$

$$\Rightarrow P \geq (MA^2 + MB^2)^2 - \left(\frac{MA^2 + MB^2}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{4} (MA^2 + MB^2)^2$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{4} \left(2MK^2 + \frac{AB^2}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{16} \cdot AB^4.$$

Vậy, $P = MA^4 + MB^4 + MA^2 \cdot MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{16} \cdot AB^4$ khi và chỉ khi $M \equiv K$.

Mà $K(2;-1;0) \Rightarrow y_0 = -1$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x) = e^{3x} + ae^{2x} + be^x$ với a, b là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x)$ có hai giá trị cực trị là 2 và 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = g^3(x)$ và $(-f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x})g^2(x)$ bằng

A. 21.

B. 7.

C. 107.

D. 39.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = 3e^{3x} + 2ae^{2x} + be^x$.

$$\Rightarrow g(x) = 4e^{3x} + 3ae^{2x} + 2be^x \Rightarrow g'(x) = 12e^{3x} + 6ae^{2x} + 2be^x$$

Ta có: $g'(x) = 2e^x(6e^{2x} + 3ae^x + b) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6e^{2x} + 3ae^x + b = 0$ (Đây là một phương trình bậc hai với e^x nên có tối đa 2 nghiệm, suy ra $g(x)$ có tối đa 2 cực trị).

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm m, n và $\begin{cases} g(n) = 2 \\ g(m) = 5. \end{cases}$

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{3x} + ae^{2x} + be^x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} + ae^{2x} + be^x) = +\infty$, mặt khác hàm số $g(x)$ có tối đa 2 cực trị có giá trị là 2 và 5 nên phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm.

Xét phương trình: $(-f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x})g^2(x) = g^3(x) \Leftrightarrow -f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x} = g(x)$

$$\Leftrightarrow -(e^{3x} + ae^{2x} + be^x) + 5(3e^{3x} + 2ae^{2x} + be^x) + 2e^{3x} = 4e^{3x} + 3ae^{2x} + 2be^x$$

$$\Leftrightarrow 12e^{3x} + 6ae^{2x} + 2be^x = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = n. \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \left| \int_m^n \left[(-f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x})g^2(x) - g^3(x) \right] dx \right|$

$$= \left| \int_m^n g^2(x) (-f(x) + 5f'(x) + 2e^{3x} - g(x)) dx \right| = \left| \int_m^n g^2(x) g'(x) dx \right| = \left| \int_m^n g^2(x) dg(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{3} g^3(x) \right|_m^n = \frac{1}{3} |g^3(n) - g^3(m)| = 39.$$